

白話泛函分析入門 數學推理入門

陳興逸
蔡清池
陳興忠

著



第一章 距離空間

距離空間又稱為度量空間(Metric Space)，度量就是量測的意思。我們一般所熟知的距離為歐幾里得空間(簡稱歐式空間)的距離，廣義距離可以有不同的定義方式，有別於歐幾里得距離(簡稱歐式距離)。metric 是量測的意思，(數學中測度的英文是用 measure 這個字，兩者字的來源都是同一個)，即是將空間的元素(或者說成空間的點)作量測並使之量化。在歐式空間中，空間的元素為點，這個點會與原點產生距離，所以點與點之間也會產生距離。但在廣義的距離空間中，空間的元素為函數，這些函數就等同空間的點(此種空間的點又可視為一個歐幾里得空間的向量)，就如同傅立葉級數中，每一個指數函數 $e^{in\omega_0 t}$ ($n = 0, \dots, \infty$) 代表一個維度，此傅立葉級數就像空間中的點(這是一個無限維度的例子)。在此先說明什麼泛函，泛函英文是 functional(在此當名詞)，又稱廣義函數，我們熟知的 function 是函數之意。函數是由數映射到數；泛函(或稱廣泛函數或稱廣義函數)則是由函數映射到數，而這個函數可當作空間中的點來看，空間中的點又可當作向量來看。用英文說明則為: A functional is a particular function from a vector space into real numbers. 至於為什麼用 functional 這個詞並當作名詞，則是為了與傳統 function 這個詞作區隔，就像 integral 可解釋成整數的(當作形容詞)或積分(當作名詞)。

一個班級若有 50 個人，對每個人身高(或體重)作量測，將量測的身高(或體重)當作離原點的距離，就可以形成距離空間(又稱度量空間)。故 Metric Space 就是 distance-metric space (距離量測空間)，在英文文獻都是稱作 metric space。我們對集合中每一元素可給一個份量(如身高、體重、離原點距離)，而這個份量是量測得來的，這個份量也就是廣義的離原點距離。那麼元素與元素又可形成

相對距離。

註 1：去查字根與字源(etymology，可參考此網站 <https://www.etymonline.com/>)，可知 metric 與 measure 都是量測的意思，只是字尾發生變化。

註 2：functional 英文解釋為: of the function 或 function-like(像函數之類的)。像函數之類的意思即是廣義的函數之意(比起狹義的函數定義來說)。狹義函數(一般稱為函數)的定義域為數值，廣義函數的定義域為函數或數值，廣義函數又稱為廣泛函數，簡稱泛函或廣函。在物理化學領域中電子軌道(orbit)與電子軌域(orbital)，軌道指電子運行不變的軌跡，但軌域指電子在一條不變的軌跡附近運動，這個運動範圍稱軌域。可知軌域是廣義軌道之意。先有 orbit，而後創造了 orbital。同樣地，先有 function，而後創造了 functional。

1.1 距離空間的定義與舉例

定義 1.1.1 距離空間

設空間 X 為一非空集合，若存在二元映射(兩個成對元素映射至實數， $\times$ 為 Cartesian product) $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ 使得 $\forall x, y, z \in X$ ，若滿足以下三個條件(形成距離空間三條件)則稱作距離空間：(在此 d 為 distance 之意)($\forall$ 為 for All 之意，字母 A 倒過來寫)

- (1) 非負性(Positivity): $d(x, y) \geq 0$ ，且 $d(y, x) = 0$ 當且僅當 $x = y$ ；
- (2) 對稱性(Symmetry): $d(x, y) = d(y, x)$ ；
- (3) 三角不等式(Triangle Inequality): $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (兩邊和大於等於第三邊)，則稱 d 為距離函數，經過 d 的運算後，就可算出兩點間的距離。
 (X, d) 被稱為**距離空間**或**度量空間**(Metric Space)，metric 是量測的意思，指空間點元素之間的距離可以量測。若距離空間的元素是函數，距離函數 d 則稱距離泛函或亦可簡稱距離函數。因為 $x \in X$ ，所以 (x, d) 可代表一個空間的點與對應此點到原點的距離。有些書習慣用**距離空間**，有些書習慣用**度量空間**，兩者為同義詞。事實上，若要計算兩個函數 $f(x)$ ， $g(x)$ 的差異性，最簡單方式則為： $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$ ，而 $[\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx]^{\frac{1}{2}}$ 就是表達兩個函數之間的距離。(三角不等式亦可稱為三角形不等式)

在此先介紹兩個引理(Lemma)，引理有引導的意思，即指以後的定理或證明會用到的副定理(又稱輔助定理)。

引理 1.1.1 施瓦次不等式(Schwarz Inequality) 對任意實數 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，
 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，

$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 成立。

證明 任取實數 λ ，可得 $0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2$ ，

可知右端二次方程式之判別式不大於零，即

$$\Delta = (2 \sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 - 4 \sum_{i=1}^n b_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 0。$$

得證。

施瓦次不等式之推廣式 — Hölder 不等式: (例 3.4.2 有此不等式證明)

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

上式積分形式為:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，可稱 p, q 為一對共伴數(或稱共軛數)，所謂共伴為成對之意謂(類似抽象代數中的相伴)。

註：Schwarz 是德國是數學家，發音近似為"fvarts"，故翻譯成施瓦次，在此 w 要發"v"。

引理 1.1.2 閔可夫斯基(Minkowski) 不等式， $a_i, b_i \in R$ (實數)，

$$[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2]^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}。$$

證明: 利用 Schwarz 不等式 $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}$ (兩向量內積 ≤ 各自長度乘積)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}。 \end{aligned}$$