前言

圓周率（π；pi；發音拍），既是無理數，又是超越數，故在小數點後作無限不循環的呈現。任意一圓的內接或外切正多邊形，以任意邊數爲起始，趨近該圓的面積或周長，即所謂「正形圓（圓正形）」。

公元前三世紀古希臘數學家阿基米德(Archimedes)因堅信「圓，即窮盡邊數之正多邊形」而創立割圓術，並推得半徑爲 r 的圓面積公式爲 πr^2。十七世紀英國數學家牛頓(Newton)創立二項式定理，是將過往所認知的有限項推廣至無止境的展開。

因這般「無窮盡」而形成通則，突顯 pi 在表達形式上是多元的，就好比級數、數列方面，皆是以鮮少有人提及的「遞減(descending)」作爲探討主軸。因此，過程中勢必加以揀選，去蕪存菁，好讓讀者看到最精采的圓周率之詮釋。

反三角函數的公式推演，即爲正形圓所強調的「特殊式」—在無窮級數中，以單位圓($r = 1$)的內接或外切正 n 邊形爲首項，項數增加，面積(π)或周長(2π)的精確度跟著提升—也就是從正多邊形逐步演變到圓（邊愈多愈像圓）的歷程。

本文所呈現的，便是以前人的成果爲基礎，融入自我的理念於其中。爲了宣揚理念而開發新工具，用以闡述新事物所帶來的圓周率現象。當然，先講解理論，再拿來應用，進而證實這些方法足以（有效且有效率的）表達圓周率。

表 0 級數、數列的特質和交集

<table>
<tr><td colspan="8">圓周率</td></tr>
<tr><td colspan="5">級數</td><td colspan="3">數列</td></tr>
<tr><td colspan="5">角度調和（一般式）
直角三角形 $a^2 + b^2 = c^2$</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">外外</td><td>內內</td><td colspan="5">內外調和</td><td>外外</td></tr>
<tr><td colspan="2">UNUUAT</td><td colspan="3">對偶調和（特殊式）
正 n 邊形</td><td>猜想</td><td>有限</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>NAS</td><td colspan="2">$NUAT_n$</td><td>YFM</td><td>YGM</td><td>PPM</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">UNU_n</td><td colspan="2">$pf(a, b)$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="5">梅欽型</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="5">U; NU</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="5">小數精確，多</td><td colspan="3">分數位數，少</td></tr>
<tr><td colspan="8">調和均衡（均勻趨近、臨界點平衡），收斂最佳</td></tr>
</table>

第一章　π的級數公式

正形圓：以正 n 邊形爲起始，趨近半徑爲 r 的圓($n \geq 3 \in N$; $r > 0 \in R$)。

理念簡單判別：左式（弧度比，如π/n）＝右式（弧度值，如$\sin(\pi/n)$）。以解析幾何爲基礎，生成反三角函數—if $y = \tan(x)$, then $x = \arctan(y)$—並造就π的無窮級數，進而探討其特殊式與一般式。特殊式取決於邊數 n，一般式取決於自變數 x。習慣上，n 爲自然數，k 爲非負整數，h 爲整數。

第一節　反正弦函數（直接幾何）

十七世紀英國數學家牛頓(Newton)整合前人經驗開發「二項式定理」，進而發明「廣義二項式定理」以及「微積分基本定理」，致使反正弦展開式（之後稱牛頓公式 N）得以遂行，而π單項($\sum$; sigma)中的最佳收斂(N_{12})才得以問世！

1.　圓內接牛頓公式(N)

在直角座標中，若以原點 $O(0,0)$爲圓心，則圓的方程式爲 $x^2 + y^2 = r^2$。根據牛頓的觀點，是以特別角—$\sin 30° = \sin(\pi/6) = 1/2$—來探討$\pi$的個案。倒不是因爲他的夾角最小；90 度雖然也是有理數，但已無扇形、區間之分，故不取。

第二章 π的數列公式

如以單位圓面積來看，確有（遞增、減的）內外之分；
如以單位圓周長來看，實有（無、有形的）等分之別。

中國南北朝時期，根據數學史家的推斷：

祖沖之先以割圓術，得知$3.1415926 < \pi < 3.1415927$；接下來認知$3.1415926/1 = 31415926/10000000$；再以輾轉相除法（連分數）取得其中若干個 π 的漸進分數，並挑選 22/7，355/113 這兩個在形式上較爲簡單，在內容上較爲準確的整數比作爲約率和密率，也就是圓周率的近似值。

但是，這種過程與幾何的關聯不夠密切；如果要從幾何切入，那麼本文所提供的方法，或可帶來嶄新的氛圍！以約率作幾何分析，可得「對偶函數」，也就是其極限值，趨近單位圓（半徑 1）的內接、外切正方形面積（2 和 4）。

此法與連分數的共同點：以 N 或 U 方面的有理級數，先行掌握π在小數點後的實用精確數據段落，接著代入新公式來獲取漸進分數（簡單整數比）；不過，新方法因結合費氏數列，使得相鄰兩數之間有著更爲強烈的因果關係。即使只知約率而已，仍可透過調和—那是一種「跳脫理想平均分」的不平均分概念—陸續推求密率及密率之後。

第三章　π的均匀和不均匀

圓周率的相關函數，其連續性（沒有重複、遺漏）已不在話下。至於均勻與否，在前兩章已現出端倪。本章乃就此現象作進一步的表達；儘管在不均匀（擾動）的部分並非筆者想要的，但二者和居中的界限（臨界點）畢竟構成了 π 的全部。因此，在爲眾人的奉獻上，這無可迴避；而在主觀認定上，確實可以取捨。

所謂「擾動（圖形化來看，非平順的趨近圓）」，就是發生於無窮級數的首項與極限值之間不規則的波動、折返現象，且通常出現在剛開始的前幾項和。

表 3 收斂率(CV)的定義

收斂率(CV)：平均「Q 個 $k+1$ 項」所得之精確位數
$\text{if } arc(x) = \sum_{k=0}^{k}(x_1)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{k}(x_2)^{2k+1} + \cdots + \sum_{k=0}^{k}\left(x_Q\right)^{2k+1}$ $\text{then } \pi - arc(x) = \pm c.d \cdot 10^{-n}$ $1 \le c \le 9 \in \mathrm{N};\ 0 < d < 1$
$CV_k = \dfrac{n-1}{Q(k+1)}$
CV 務必大於原始單項，才算是達到化爲梅欽型的目的。

不管分幾項：級數前 $k+1$ 項和之收斂率，即爲 $\mathrm{CV_k}$。相同的項數（$\sum$個數）之間，確實可略去 Q 值作比較。當取相同的極限值和 k 值：CV 愈大，收斂愈好；等於 $0(n=1)$即表沒有精確（也可能收斂極慢），毫無意義！

第四章　π的實作

於形：圓，乃一封閉空間；
於數：π，既是無理數，又是超越數。

尺規，意在表達圓與直線之間的關係。

古希臘人於幾何方面的理念：平面作圖，只允許使用圓規和沒有刻度的直尺。這一份堅持，至公元前三世紀的希臘數學家歐幾里得（Euclid，一說與阿基米德亦師亦友）可謂集大成，並在其著作《原本(The Elements)》中規定：

1) 兩點之間可以連結一條直線；
2) 直線可以無限延伸；
3) 以任意點爲中心，任意長爲半徑，可作圓。

運用直尺和圓規，以「有限的次數」爲原則，在過程中可多元施展作圖技巧。

十七世紀法國數學家笛卡兒(Descartes)發明直角座標，使負數獲得幾何表達，即爲「解析幾何」，進而證明自古希臘以來的幾何三大難題實爲不可能。爾後，許多幾何問題皆可轉化爲代數問題來研究。

十八世紀德國數學家高斯(Gauss)將複數融入解析幾何，就是在複數平面上：以等分圓理解代數；以代數尺規正多邊形。不僅展現虛數「$i=\sqrt{-1}$」在幾何中的作用，而且因他大力推廣而使得相關符號逐漸普及。

後記

考量利弊得失，加上筆者的主觀認定：比較值得呈現的，著實屈指可數……

在級數方面，除了收斂速度，尚有遞增(A)、遞減(D)之別。這些不外乎堅持了均勻、無負項遞增和偏少位數等原則。

表 5-1 圓周率在級數方面的成果

<table>
<tr><td rowspan="2">$\frac{2\pi}{n}$</td><td>UNU_n</td><td>A</td></tr>
<tr><td>NUAT_n</td><td rowspan="2">D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">π</td><td>pfNT</td></tr>
<tr><td>UNUUAT(20, 21)</td><td>A</td></tr>
<tr><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>NAS(20, 21)</td><td>D</td></tr>
<tr><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>pf(5, 8)</td><td>D</td></tr>
<tr><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>GU(−2, 16, 10, −7)</td><td>D</td></tr>
<tr><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>NU(12, 1)</td><td>A</td></tr>
</table>

尤其在個案方面，都是深具研究代表性的一時之選；或者，他們即使事過境遷但對筆者而言依然能輕鬆的回憶起並且回味無窮的部分。

在數列方面，除了發展較好的 YFM，還有兼級數性質的 pfQ。

表 5-2 圓周率在數列方面的成果

	1	2	3	4	5	6	…
YFM	$\frac{22}{7}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{1357944}{432247}$	$\frac{713598521}{227145464}$	$\frac{13469172065}{4287370627}$	$\frac{447008147874}{142287112673}$	
pfQ	$\frac{42}{13}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{98}{31}$	$\frac{192}{61}$	$\frac{1330}{423}$	$\frac{415}{132}$	

此外，如果將注意力擺在「前後項的差爲某整數的倒數」或「有理數中的分子分母是否爲質數」方面，那麼或許是有潛力（如附錄，但不保證特徵持續）的！

泰勒級數中的角色互換與翻轉公式之運用

111.1.22

明確定位	極限值（後項、新數）為 u/t 首項（前項、舊數）為 q/p	
配合子或母式	$L=\dfrac{2u}{pu-(q-2)t}=\dfrac{y}{x};C=\dfrac{pL-q}{2}$	當分子 q 為奇數時：紅減半。
rs 比例	$r=\dfrac{4x-y}{2};s=\dfrac{y-2x}{2}$	

$$\frac{864}{275}+\frac{431\cdot 2}{5^4\cdot 11^3}+\frac{431\cdot 2^4}{5^6\cdot 11^5}+\frac{431\cdot 2^7}{5^8\cdot 11^7}+\cdots+\frac{431\cdot 2^{3k+1}}{25^{k+2}\cdot 11^{2k+3}}+\cdots=\frac{22}{7}$$

$$\frac{22}{7}-\frac{5}{2^2\cdot 3^3\cdot 7^2}-\frac{5\cdot 137}{2^5\cdot 3^6\cdot 7^3}-\frac{5\cdot 137^2}{2^8\cdot 3^9\cdot 7^4}-\cdots-\frac{5\cdot 137^k}{2^{3k+2}\cdot 27^{k+1}\cdot 7^{k+2}}-\cdots=\frac{864}{275}$$

$$\frac{355}{113}+\frac{3\cdot 59}{11\cdot 113^2}+\frac{3\cdot 59\cdot 2^2}{11^2\cdot 113^3}+\frac{3\cdot 59\cdot 2^4}{11^3\cdot 113^4}+\cdots+\frac{3\cdot 59\cdot 4^k}{11^{k+1}\cdot 113^{k+2}}+\cdots=\frac{22}{7}$$

$$\frac{22}{7}-\frac{2^2}{7^2\cdot 71}-\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5}{7^3\cdot 71^2}-\frac{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}{7^4\cdot 71^3}-\cdots-\frac{2^2\cdot(9\cdot 5)^k}{7^{k+2}\cdot 71^{k+1}}-\cdots=\frac{355}{113}$$

對偶函數調和數列。極限值居圓外($>\pi$)從內正方2（平均分1: 1起步）、居圓內($<\pi$)從外正方4（不平均分取2: 3起步）趨近，類推($q_{n-1}/p_{n-1}=L_n$)獲取較為靠近圓(π)且可能不只一個的首項。其成果除了72/23皆位於均衡區間(Drs = 0 or 1)。

u/t	(L_0,L_1)	L_2	L_3	$\cdots$	$\dfrac{22(355+a)}{7(3\cdot 113+a)+113}$
$\frac{22}{7}$	$(2,3)$	$\frac{72}{23}$	$\frac{864}{275}$		77
$\frac{355}{113}$	$(2,3)$	$\frac{267}{85}$	$\frac{23763}{7564}$		$\left(-88,\frac{-22}{67}\right)$
$\frac{223}{71}$	$\left(4,\frac{16}{5}\right)$	$\frac{512}{163}$			-99
$\frac{311}{99}$	$\left(4,\frac{16}{5}\right)$	$\frac{4992}{1589}$			$\frac{11}{7}$
$\frac{600}{191}$	$\left(4,\frac{16}{5}\right)$	$\frac{688}{219}$			-11
$\frac{289}{92}$	$\left(4,\frac{16}{5}\right)$	$\frac{4640}{1477}$			$\frac{-165}{7}$
$\frac{239581}{76261}$	$(2,3)$	$\frac{359373}{114392}$			$\frac{-242}{1013}$
$\frac{98888}{31477}$	$(2,3)$	$\frac{296670}{94433}$			$\frac{-5}{38}$
$\cdots$					